

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx$$

ΛΥΣΗ

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}} dx$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx$$

Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2J = \int_0^{\pi/2} dx \Leftrightarrow J = \frac{\pi}{4}$$

Να υπολογιστεί το επόμενο όριο:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - 3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - \nu^2}} \right)$$

ΛΥΣΗ

Το συγκεκριμένο πρόκειται για άθροισμα Riemann. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - \nu^2}} \right) &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{4\nu^2 - \kappa^2}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2}} \end{aligned}$$

Οπότε η συνάρτηση μας είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ και με διαμέριση:

$$\xi_{\kappa} = \frac{\kappa}{\nu}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \nu$$

Οπότε το τελευταίο άθροισμα είναι ισοδύναμο με το ολοκλήρωμα:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{6}$$